EXERCICE II : L'OSCILLATEUR HARMONIQUE (5,5 points)

Un oscillateur harmonique à une dimension est un modèle d'oscillateur qui intervient dans de nombreux domaines de la physique : mécanique et électricité notamment.
Son évolution temporelle est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + A.Y = 0$$

Y *est une grandeur physique qui varie au cours du temps, comme par exemple, la position x d'un mobile ou la charge électrique q d'un condensateur.*

A *est une constante positive reliée à la période propre T_0 de l'oscillateur par :*

$$A = \frac{4\pi^2}{T_0^2}.$$

T_0 est ***indépendante*** *de l'amplitude de la grandeur Y.*

1. Le pendule simple.

Un pendule simple a une longueur l *égale à* 100 *cm. La période mesurée T est donnée dans le tableau du document 1 de* ***l'annexe II à rendre avec la copie****.*

Donnée : Intensité de la pesanteur : g = 9,81 N.kg^{-1}.

1.1. La période propre T_0 du pendule simple a pour expression : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Calculer sa valeur.

1.2. Pourquoi peut-on, d'après le tableau du document 1 ci-dessus, parler d'isochronisme des petites oscillations ? Justifier la réponse.

2. Le pendule élastique.

Un solide S est relié à un ressort dont l'autre extrémité est fixe. Le solide de masse m égale à 205 g *et de centre d'inertie G peut glisser sur un rail à coussin d'air horizontal. Le ressort, à spires non jointives, a une masse négligeable et une constante de raideur k égale à* 10,0 N.kg^{-1}. *Au repos, G est en O.*
Le document 2 de ***l'annexe II à rendre avec la copie*** *schématise le dispositif expérimental.*

À un instant t, la position du solide est repérée par l'abscisse x(t) sur l'axe (O, $\vec{i}$) : x(t) représente donc également l'allongement du ressort. Un dispositif d'acquisition a permis d'obtenir l'enregistrement du document 3 de ***l'annexe II à rendre avec la copie.***

2.1. Équation différentielle.

2.1.1. Comment qualifier, d'après le document 3, les oscillations obtenues ?

2.1.2. Faire le bilan des forces s'exerçant sur S. Les représenter sans souci d'échelle sur le document 2 **en annexe à rendre avec la copie**.

2.1.3. Montrer que, dans ces conditions, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

2.2. Le pendule est assimilable à un oscillateur harmonique puisque l'équation ci-dessus est analogue à l'équation générale donnée en début d'exercice.

2.2.1. Déterminer l'expression de la période propre T_0 en fonction de k et de m.

2.2.2. Calculer la valeur de T_0.

2.2.3. Déterminer la valeur expérimentale $T_{0,exp}$ en explicitant le raisonnement. Comparer avec la valeur calculée en 2.2.2.

2.3. Énergies.

2.3.1. Comment appelle-t-on les énergies ayant respectivement pour expressions $\frac{1}{2}kx^2$ et $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$?

2.3.2. Pour un lâcher sans vitesse initiale, l'équation différentielle a pour solution $x(t) = X_m \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)$.

Montrer que l'énergie mécanique a pour expression $E_m = \frac{1}{2}kX_m^2$.

On rappelle que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

2.3.3. Quelle est la valeur minimale de l'énergie mécanique ?

2.4. On réalise différents lâchers sans vitesse initiale en faisant varier l'amplitude.

2.4.1. Calculer l'énergie mécanique lorsque X_m = 1,00 cm.

2.4.2. Combien de valeurs de l'énergie mécanique sont possibles entre X_m = 0 et X_m = 1,00 cm : aucune ou une infinité ? Justifier.

3. Le pendule élastique en mécanique quantique.

On considère une molécule diatomique AB vibrant autour de son centre de masse G (m_A et m_B sont les masses respectives des atomes A et B).

On assimile cette molécule à un système de masse μ (appelée masse réduite et telle que $\mu = \frac{m_A \times m_B}{m_A + m_B}$) oscillant par rapport au point G fixe.

Le mouvement est rectiligne sinusoïdal de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}$ où k est la constante de raideur du ressort équivalent.

Données :

Constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J.s ;
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m.s^{-1}.

3.1. La mécanique quantique montre que l'énergie de vibration E_{vib} de la molécule est quantifiée. Qu'entend-on par énergie quantifiée ?

3.2. La molécule est assimilée à un oscillateur harmonique de période propre $T_0 = 1{,}95 \times 10^{-14}$ s. Un niveau n d'énergie de vibration est caractérisé par $E_{vib}(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu_0$ où h est la constante de Planck, ν_0 la fréquence de l'oscillateur et n un entier positif : n = 0, 1, 2, 3, … .

3.2.1. Vérifier que la fréquence ν_0 de l'oscillateur vaut environ $5{,}13 \times 10^{13}$ Hz puis calculer les énergies manquantes dans le tableau du document 4 de **l'annexe II à rendre avec la copie.**

3.2.2. Représenter le diagramme en énergie de la molécule sur le document 4 de **l'annexe II à rendre avec la copie** en indiquant chaque niveau par un segment horizontal. Que peut-on dire de l'écart entre deux niveaux successifs ?

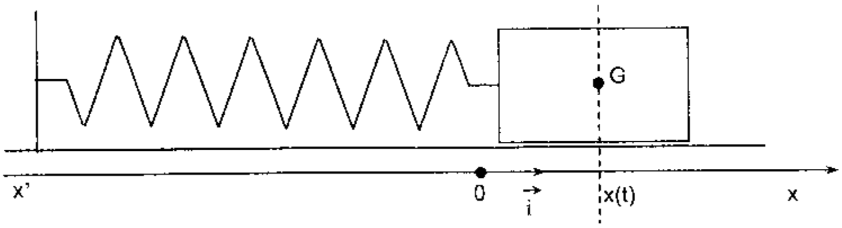
3.2.3. La transition du niveau caractérisé par n = 0 au niveau caractérisé par n = 1 correspond à l'absorption d'une radiation. Calculer la longueur d'onde correspondante dans le vide. Cette radiation est-elle visible ? Justifier.

ANNEXE II À RENDRE AVEC LA COPIE : L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

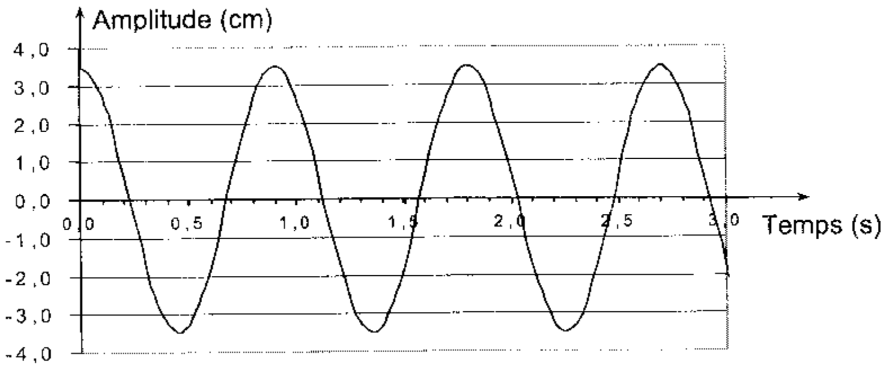
Document 1.

Amplitude (°)	0,00	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00
T (s)		2,01	2,01	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05

Document 2



Document 3



Document 4

Niveau n	$E_{vib}(n)$ (10^{-20} J)
0	
1	
2	8,50
3	11,90
4	15,30